TD$_{14}$ – Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ★

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi jointe est reportée dans le tableau suivant :

X \ Y	1	2
3	a	2a
4	3a	4a

1. Déterminer la valeur de a
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$
3. Déterminer $\mathbb{E}(XY)$, puis calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ★★

Dans un fast-food, entre 14h et 14h15, le nombre X de clients suit une loi de Poisson de paramètre 10. Il y a 4 caisses pour prendre les commandes. Le gérant (très joueur) expérimente un nouveau système baptisé Happy-Bazar : les clients qui arrivent reçoivent « au hasard »et indépendamment les uns des autres un numéro de caisse vers laquelle ils doivent se diriger. On note X_i le nombre de clients dirigés vers la caisse i pendant ce quart d'heure.

1. Quelle est la loi de X_1 sachant $[X = n]$ $(n \in \mathbb{N})$?
2. En déduire la loi de X_1.
3. Que peut-on dire des lois de X_2, X_3 et X_4 ?
4. Quelle est la loi de $Y = X_1 + X_2$?
5. Déterminer la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 3 ★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p), p \in]0, 1[$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y \geqslant k)$.
2. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$. Montrer que U suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
3. Déterminer la loi de $V = \max(X, Y)$.

Exercice 4 ★★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ et $\mathbb{V}(X + Y)$.
2. Déterminer la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Exercice 5 Matrices aléatoires ★★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit inversible.

Exercice 6 ★

Soit $a > 0$ et soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à support dans $\mathbb{N}$, telles que la loi jointe du couple (X, Y) soit donnée par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \lambda \frac{a^{i+j}}{i!j!}.$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Donner les lois marginales du couple (X, Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 ★★

Soit $p \in]0,1[$, et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi jointe est donnée par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). Quelle est la loi de $X+1$? En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Montrer que X et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 ★★★

Soient X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 9 ★★

Soit $p \in]0,1[$. Déterminer c pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{p^{n+1}}{(n+1)c}, n \in \mathbb{N}$.

Déterminer alors la fonction génératrice de X, son espérance et sa variance.

Exercice 10 ★★

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Y suivant la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$).

1. Déterminer la fonction génératrice de $Z = XY$ en fonction de celle de X.
2. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, montrer que $G_Z = G_Y \circ G_X$
3. En déduire dans ce cas l'espérance et la variance de Z.

Exercice 11 ★★

Soit X de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y de loi $\mathcal{B}(m, p)$ indépendantes.

1. Quelle est la loi de $S = X + Y$?
2. Donner la loi conditionnelle de X sachant que $[S = s]$ où $s \in [\![0, n+m]\!]$.
3. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Calculer $\mathbb{P}(X \neq Y)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 12 ★★

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\dfrac{X+Y}{1+Z}$ admet une espérance, et la déterminer.

Exercice 13 ★★

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{2}{3}.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de $Y_i = X_i - 1$.
2. Quelle est la loi de $Y_1 + \cdots + Y_n$?
3. En déduire la loi de S_n.

Exercice 14 ★★★

A chaque fois qu'on le lance, un dé donne un 6 avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On le lance n fois, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus et on pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$. On cherche à estimer expérimentalement la valeur de p.

1. Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Montrer que $\mathbb{V}(F_n) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une condition suffisante sur n pour que
$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant 10^{-2}) \leqslant 0,05.$$
4. Que devient cette condition si l'on remplace 10^{-2} par 10^{-3} ?

Exercice 15 ★★★

Une compagnie d'assurance assure 500 navires pour une somme de 5 millions chacun. Chaque navire a par an une probabilité de couler égale à 0.001. S'il ne coule pas, il est considéré comme en état de marche.

1. X est la variable aléatoire réelle qui compte le nombre de navires coulés par an. Trouver sa loi puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Quelles réserves doit posséder la compagnie pour être sûre de payer les indemnités avec une probabilité de 0.999 à la fin de l'année ? On admet que si Y suit une loi de Poisson de paramètre $1/2$ alors
$$\mathbb{P}((Y \leqslant a) \geqslant 0.999 \quad \Rightarrow \quad a \geqslant 4$$

Exercice 16 ★★★★★

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n.
2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Exprimer l'espérance de $\dfrac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n.

Exercice 17 Somme aléatoire de variables aléatoires, Identité de Wald ★★★★★

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ et soit N une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On définit une application X sur Ω par $X = \sum_{k=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Montrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. On suppose que les X_i suivent tous la même loi, que N est indépendant de la famille $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et que X_0 et N admettent une espérance. Montrer qu'alors X admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_0)$$

Exercices issus d'oraux

Exercice 18 ★★★

(*Oral 2016*)

Soit $\alpha \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = (1-\alpha)\alpha^n$.

Soit N un entier fixé supérieur ou égal à 2. On note Q et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de X par N.

1. Donner les valeurs prises par les variables Q et R.
2. Donner la loi conjointe du coupe (Q, R)
3. Déterminer la loi de Q et de R.
4. Q et R sont-elles indépendantes ?

Exercice 19 ★★★

(*Oral 2018*)

On effectue une infinité de tirages aléatoires, le premier tirage s'effectuant dans $I_n = \{0, 1, , \cdots, n\}$

Si on tire le nombre p le tirage suivant s'effectue dans $I_p = \{0, 1, \cdots, p\}$ et ainsi de suite. On note X_k le résultat obtenu au tirage k.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance
2. Déterminer la loi de X_{k+1} sachant $[X_k = p]$
3. Calculer $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$ en fonction de la loi de X_k.
4. En déduire l'espérance de X_{k+1} en fonction de celle de X_k puis en déduire l'espérance de X_k.

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2018*)

On considère deux amis qui partent à la pêche. Si le nombre de poissons attrapés est pair les deux amis se les répartissent équitablement et s'il est impair il font une bouillabaisse.

Le nombre X de poissons pêchés suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Une fois sur quatre les deux amis ne pêchent aucun poisson, en déduire la valeur de λ
2. Les deux amis ont-ils plus de chance de faire une bouillabaisse ou de se partager les poissons ?
3. Déterminer la probabilité que les deux amis se partagent les poissons et que le nombre de poissons de chacun soit pair.
4. On note Y la variable aléatoire que représente le nombre de poissons par individu à la sortie de la pêche. Déterminer la série génératrice de Y, en déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 21 ★★★

(*Oral 2019,2023*)

On considère un détecteur de particules sur lequel arrive un nombre N de particules pendant une durée d donnée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose que chaque particule est, de manière indépendante des autres, détectée avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note S le nombre de particules détectées pendant la durée d.

1. Pour $(n, s) \in \mathbb{N}^2$ déterminer $\mathbb{P}(S = s|N = n)$ puis $\mathbb{P}(N = n, S = s)$
2. En déduire la loi de S, son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi de $N - S$. Les variables S et $N - S$ sont-elles indépendantes ?
4. Les variables N et S sont-elle indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(N = n|S = s)$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. On a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, ainsi, d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 4, Y = 2) = 1$$

C'est-à-dire $10a = 1$, d'où $a = \dfrac{1}{10}$

2. Les lois marginales de X et Y sont données par

x	3	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

y	1	2
$\mathbb{P}(Y = x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = 3\frac{3}{10} + 4\frac{7}{10} = \frac{37}{10}, \qquad \mathbb{E}(Y) = 1\frac{4}{10} + 2\frac{6}{10} = \frac{16}{10}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 9\frac{3}{10} + 16\frac{7}{10} - \frac{37^2}{100} = \frac{1390 - 1369}{100} = \frac{21}{100}$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1\frac{4}{10} + 4\frac{6}{10} - \frac{16^2}{100} = \frac{280 - 256}{100} = \frac{24}{100}$$

3. On a, d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=3}^{4} k \times j\mathbb{P}(X = j, Y = k)\\ &= 3\frac{1}{10} + 6\frac{2}{10} + 4\frac{3}{10} + 8\frac{4}{10}\\ &= \frac{59}{10}\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{59}{10} - \frac{37}{10}\frac{16}{10} = \frac{590 - 592}{100} = -\frac{1}{50}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \frac{\frac{-1}{50}}{\frac{\sqrt{21 \times 24}}{10}} = \frac{-1}{30\sqrt{14}}$$

4. Puisque $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$, Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Corrigé de l'exercice 2

1. Chaque client se présente à la caisse 1 avec probabilité $\dfrac{1}{4}$, et ce, indépendamment du choix des autres clients.

   Puisqu'il y a n clients, nous reconnaissons alors une loi usuelle : la loi de X_1 sachant $X = n$ est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{4}\right)$.

   Ainsi, on a

$$P_{[X=n]}(X_i = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{4^k}\dfrac{3^{n-k}}{4^{n-k}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\{[X=n], n\in\mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, on a, pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=k|X=n)\mathbb{P}(X=n)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{4^k}\frac{3^{n-k}}{4^{n-k}}\frac{10^n}{n!}e^{-10}\\
&= \frac{e^{-10}}{k!}\left(\frac{10}{4}\right)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}\frac{3^{n-k}}{4^{n-k}}10^{n-k}\\
&= \frac{e^{-10}}{k!}\left(\frac{10}{4}\right)^k\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{30}{4}\right)^i\\
&= \frac{e^{-10}}{k!}\left(\frac{10}{4}\right)^k e^{\frac{30}{4}}\\
&= \left(\frac{10}{4}\right)^k\frac{e^{-\frac{10}{4}}}{k!}
\end{aligned}$$

Pour $n<k$ on a $\mathbb{P}(X_1=k|X=n)=0$

Changement d'indice

On pose $i=n-k$.

On en déduit que X_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{10}{4}$.

2. Par les mêmes arguments que précédemment, X_2, X_3 et X_4 suivent également une loi de Poisson de paramètre $\frac{10}{4}$.
3. On peut remarquer que la loi de X_1+X_2 sachant $X=n$ est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

   Le même calcul que dans la question 2. montre alors que X_1+X_2 suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{10}{2}=5$.

Explication

X_1+X_2 est le nombre de clients ayant choisi l'une des deux premières caisses. Or, pour chaque client, la probabilité qu'il choisisse l'une des deux premières caisses est $\frac{1}{2}$.

4. X_1, X_2 et X_1+X_2 suivent une loi de Poisson et admettent donc une variance, de plus on a

$$\mathbb{V}(X_1+X_2)=\mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2)+2\operatorname{Cov}(X_1,X_2)$$

Or nous avons prouvé que X_1,X_2 et X_1+X_2 suivent toutes trois des lois de Poisson, lois dont on connait la variance, ainsi

$$\mathbb{V}(X_1)=\mathbb{V}(X_2)=\frac{10}{4}\text{ et }\mathbb{V}(X_1+X_2)=5$$

On en déduit alors que

$$\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=\frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_1+X_2)-\mathbb{V}(X_1)-\mathbb{V}(X_2)\right)=0$$

Corrigé de l'exercice 3

1. Soit $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y\geqslant k)=\sum_{i=k}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=i)=\sum_{i=k}^{+\infty}p(1-p)^{i-1}=p(1-p)^{k-1}\sum_{j=0}^{+\infty}(1-p)^j=p(1-p)^{k-1}\frac{1}{p}=(1-p)^{k-1}.$$

Interprétation : ce résultat se comprend bien si on voit une géométrique comme le nombre d'essais avant l'obtention du premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli. En effet, $[X\geqslant k]$ est alors l'événement « avoir besoin d'au moins k essais », ce qui se dit encore « les $k-1$ premiers essais ont été des échecs ». Et donc on comprend bien le $(1-p)^{k-1}$.

2. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $[U\geqslant k]=[X\geqslant k]\cap[Y\geqslant k]$. Et donc par indépendance de X et Y, il vient $\mathbb{P}(U\geqslant k)=\mathbb{P}(X\geqslant k)\mathbb{P}(Y\geqslant k)$. Et X et Y ayant même loi, on a donc également $\mathbb{P}(Y\geqslant k)=(1-p)^{k-1}$.
   Ainsi $\mathbb{P}(U\geqslant k)=(1-p)^{2k-2}$.

Puisque U est à valeurs entières,

Support

X et Y sont à support inclus dans $\mathbb{N}^*$, donc il en est de même de U.

on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = k) &= \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1)\\
&= (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k}\\
&= (1-p)^{2k-2}(1-(1-p)^2)\\
&= (1-(1-p)^2)\left((1-p)^2\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, U suit une loi géométrique, de paramètre $(1-(1-p)^2)$.

3. De même $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[V \leqslant k] = [\max(X,Y) \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$$

Par indépendance de X et Y, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)^2$$

X et Y ont même loi, donc $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(Y \leqslant k)$.

Mais on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \geqslant k+1) = 1-(1-p)^k.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(V \leqslant k) = \left(1-(1-p)^k\right)^2$.

Et puisque V est à valeurs entières, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(V \leqslant k) - \mathbb{P}(V \leqslant k-1) &= \left(1-(1-p)^k\right)^2 - \left(1-(1-p)^{k-1}\right)^2\\
&= \left(2-(2-p)(1-p)^{k-1}\right)p(1-p)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4

Méthode

Pour $k = 0$ $\mathbb{P}(X = k) = 0$ et pour $k = n$, on a $\mathbb{P}(Y = n-k) = 0$. Il faut impérativement s'intéresser aux bornes avant de remplacer les probabilités par leur expression.

1. Puisque les variables sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, leur somme est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, et sa loi est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k) \qquad = \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}\\
&= \sum_{k=2}^{n} p^2(1-p)^{n-2} = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}
\end{aligned}$$

Ce résultat s'interprète bien si l'on se dit que c'est le nombre d'essais nécessaires pour obtenir 2 succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli de paramètre p : il faut 2 succès (d'où le p^2), $n-2$ échecs (d'où le $(1-p)^{n-2}$), et nous avons $(n-1)$ choix pour la position du premier succès (mais par contre aucun pour le deuxième, qui a nécessairement lieu au dernier essai).
Puisque X et Y sont indépendantes, nous savons que

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\mathbb{V}(X) = \frac{2-2p}{p^2}$$

ce qui pourrait bien entendu se retrouver par un calcul direct à partir de la loi de $X+Y$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[X+Y = n] \cap [X = k] = [Y = n-k] \cap [X = k]$, et donc par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(X = k | X+Y = n) = \frac{\mathbb{P}(X = k, X+Y = n)}{\mathbb{P}(X+Y == n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n-k)}{\mathbb{P}(X+Y == n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k)}{\mathbb{P}(X+Y == n)}$$

En particulier, pour $k \geqslant n$, alors $\mathbb{P}(Y = n-k) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X = k | X+Y = n) = 0$.
En revanche, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(X = k | X+Y = n) = \frac{\mathbb{P}(Y = n-k)\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X+Y = n)} = \frac{p(1-p)^{n-k-1}p(1-p)^{k-1}}{p^2(n-1)(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$$

Et donc la loi de X sachant $[X+Y = n]$ est une loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$.

Corrigé de l'exercice 5

Notons A l'événement $\{\omega \in \Omega : M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

$M(\omega)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, soit si et seulement si $X^2(\omega) - Y^2(\omega) \neq 0$.

Autrement dit, on a $A^c = [X^2 = Y^2]$, et puisque X et Y sont à valeurs positives, on a $A^c = [X = Y]$.

En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X = k],\ k \in \mathbb{N}^*\}$, il vient

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = Y] \cap [X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k]).$$

Par indépendance de X et Y, il vient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} \\
&= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^i \\
&= p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} \\
&= \frac{p^2}{2p - p^2} \\
&= \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

Et donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2-2p}{2-p}$$

Corrigé de l'exercice 6

1. L'énoncé nous dit que nous sommes en présence d'une loi jointe, nous savons donc que la série (double) de terme général $(\mathbb{P}(X = i, Y = j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ converge absolument et est de somme 1. Or, pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda \frac{a^{i+j}}{i!j!} = \lambda \frac{a^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a^i}{i!} = \lambda \frac{a^j}{j!} e^a.$$

   Et alors, en sommant à présent sur j, il vient

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda \frac{a^{i+j}}{i!j!} = \lambda e^a \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a^j}{j!} = \lambda e^{2a}.$$

   On en déduit donc que $1 = \lambda e^{2a} \Leftrightarrow \lambda = e^{-2a}$.

2. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = i], i \in \mathbb{N}\}$ on a

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = e^{-2a} e^a \frac{a^j}{j!} = e^{-a} \frac{a^j}{j!}$$

   On reconnaît alors une loi de Poisson de paramètre a. De même, tous les calculs étant totalement symétriques en i et en j, on montrerait que X suit également une loi de Poisson de paramètre a.

Remarque
Le calcul a déjà été fait précédemment : en étudiant la loi jointe, on a en fait déterminé (sans le dire) une des deux lois marginales.

3. On a $\mathbb{P}(X=i)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}$ et $\mathbb{P}(Y=j)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^j}{j!}$ et donc
$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)=e^{-2\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}=\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$$
de sorte que X et Y sont indépendantes.

Corrigé de l'exercice 7

1. Puisqu'on a affaire à une loi jointe, on doit avoir $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=k)=1$.

Série double

Puisqu'on a une loi jointe, cette série est automatiquement absolument convergente.

Or, pour $k\in\mathbb{N}$ fixé, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=k)=\sum_{n=0}^{k}\lambda(1-p)^k=\lambda(k+1)(1-p)^k.$$
Et alors
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=k)=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(1-p)^k=\lambda\sum_{i=1}^{+\infty}i(1-p)^{i-1}=\frac{\lambda}{p^2}.$$
On a donc $\dfrac{\lambda}{p^2}=1$ d'où $\lambda=p^2$.

2. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[Y=k],k\in\mathbb{N}\}$. Alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\mathbb{P}(X=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=n]\cap[Y=k])=p^2\sum_{k=n}^{+\infty}(1-p)^k=p^2(1-p)^n\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^i=p(1-p)^n.$$

Changement d'indice

On pose $i=k-n$

Notons dès à présent que $(X+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbb{P}(X+1=k)=\mathbb{P}(X=k-1)=p(1-p)^{k-1}$$
de sorte que $X+1\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$. On en déduit que
$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X+1)-\mathbb{E}(1)=\frac{1}{p}-1\text{ et }\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(X+1)=\frac{1-p}{p^2}.$$
Pour la seconde loi marginale, appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X=n],n\in\mathbb{N}\}$. Alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=n]\cap[Y=k])=p^2(k+1)(1-p)^k$$

3. Il s'agit de déterminer la loi de $Y-X$. Or, pour $k\in\mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y-X=k)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([Y-X=k]\cap[X=n])=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=n]\cap[Y=n+k])\\&=p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^{n+k}=p^2(1-p)^k\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n=p(1-p)^k.\end{aligned}$$
Un calcul pourrait prouver que pour $k<0$, $\mathbb{P}(Y-X=k)=0$, mais on peut également remarquer que la somme des $\mathbb{P}(Y-X=n),n\in\mathbb{N}$ vaut déjà 1, ainsi, pour $k>0$ on a
$$0\leqslant\mathbb{P}(X-Y=k)\leqslant\mathbb{P}(X-Y<0)\leqslant1-\mathbb{P}(X-Y\geqslant0)\leqslant0$$
On constate alors que $Y-X$ suit la même loi que X.

4. Pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on a d'une part

$$\mathbb{P}([X = n] \cap [Y - X = k]) = \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = n + k]) = p^2(1-p)^{n+k}$$

et d'autre part

$$\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y - X = n) = p(1-p)^n p(1-p)^k = p^2(1-p)^{n+k}.$$

Et donc pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y - X = n]) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y - X = n).$$

Donc les variables X et $Y - X$ sont indépendantes.
On en déduit que $\operatorname{Cov}(X, Y - X) = 0$. Or,

$$\operatorname{Cov}(X, Y - X) = \operatorname{Cov}(X, Y) - \operatorname{Cov}(X, X) = \operatorname{Cov}(X, Y) - \mathbb{V}(X).$$

Et donc $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Corrigé de l'exercice 8

1. Nous savons que

$$|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}.$$

Mais nous savons également que

$$\mathbb{V}(X) = p_1(1-p_1) \text{ et } \mathbb{V}(X_2) = p_2(1-p_2).$$

Or, la fonction $p \mapsto p(1-p)$ admet sur $[0, 1]$ un maximum en $p = \dfrac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\dfrac{1}{4}$.
On a donc

$$|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}.$$

2. Nous savons déjà que si X et Y sont indépendantes, alors $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
Supposons au contraire que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
Alors, par la formule de Huygens, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = p_1p_2$.
Mais d'autre part, d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} i \times j\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = P[X = 1] \cap [Y = 1]).$$

Et donc $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p_1p_2 = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$.
De plus

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p_2 - p_1p_2 = (1-p_1)p_2 = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1)$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p_1 - p_1p_2 = (1-p_2)p_1 = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) &= 1 - \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) - \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \\
&= 1 - (p_1 - p_1p_2) - (p_2 - p_1p_2) - p_1p_2 \\
&= 1 - p_1 - p_2 + p_1p_2 \\
&= (1-p_1)(1-p_2) \\
&= \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)
\end{aligned}$$

Ainsi X et Y sont bien indépendantes.

Corrigé de l'exercice 9

Il nous faut montrer que la série $\sum \frac{p^{n+1}}{(n+1)c}$ converge et déterminer c de telle sorte que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{n+1}}{(n+1)c} =$ 1.

Or on sait que, pour $x \in]-1,1[$, on a $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$, ainsi $\sum \frac{p^{n+1}}{(n+1)c}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{n+1}}{(n+1)c} = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k}{k} = \frac{-\ln(1-p)}{c}$$

Ainsi $c = -\ln(1-p)$.

La fonction génératrice de X est la somme de la série entière $\sum t^n \mathbb{P}(X=n) = \sum \frac{t^n p^{n+1}}{(n+1)c}$.

D'après le critère de D'Alembert cette série entière est de rayon de convergence $\frac{1}{p} > 1$.

Pour $t=0$ on a $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{p}{c}$ et, pour $t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[$ avec $t \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n p^{n+1}}{(n+1)c} \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n p^n}{cn} \\ &= \frac{-\ln(1-pt)}{ct} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[$ on a

$$G_X(t) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-pt)}{ct} & \text{si } t \neq 0 \\ \dfrac{p}{c} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Vérification

On doit toujours avoir $G_X(1) = 1$ (ce qui est bien le cas ici) ceci peut nous permettre de détecter d'éventuelles erreurs dans le calcul de G_X

Puisque $\frac{1}{p} > 1$, G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 1, ainsi X admet des moments à tout ordre, en particulier on a

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[\setminus \{0\} \qquad G_X'(t) = \frac{\frac{pt}{1-pt} + t\ln(1-pt)}{ct^2}$$

D'où $\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \dfrac{\frac{p}{1-p} + \ln(1-p)}{c} = \dfrac{p}{-(1-p)\ln(1-p)} - 1$

Puis

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right[\setminus \{0\} \qquad G_X''(t) = -\frac{2p^2\,t^2\,\ln(1-pt) - 4pt\,\ln(1-pt) + 2\ln(1-pt) - 3p^2\,t^2 + 2pt}{c\,t^3\,(1-pt)^2}$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 = -\frac{p\,(p + \log(1-p))}{\log(1-p)^2\,(1-p)^2}$$

Corrigé de l'exercice 10

1. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=0) &= \mathbb{P}([X=0]\cup[Y=0])\\ &= \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(Y=0)-\mathbb{P}(X=0,Y=0)\\ &= \mathbb{P}(X=0)+1-p-(1-p)\mathbb{P}(X=0)\\ &= 1-p+p\mathbb{P}(X=0)\end{aligned}$$
et, pour $n>0$, $\mathbb{P}(Z=n)=\mathbb{P}(X=n,Y=1)=p\mathbb{P}(Y=n)$
Ainsi, la série entière entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n\mathbb{P}(Z=n)$ peut s'écrire $1-p+\sum_{n\in\mathbb{N}} t^n p\mathbb{P}(X=n)$. On en déduit que son rayon de convergence R est le même que celui de G_X et, pour $t\in]-R,R[$, on a $G_Z(t)=1-p+pG_X(t)$.
2. Si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $G_X(t)=\mathrm{e}^{\lambda t-\lambda}$, d'où, pour $t\in\mathbb{R}$, $G_Z(t)=1-p+p\mathrm{e}^{\lambda t-\lambda}$
Or, pour $t\in\mathbb{R}$ on a également $G_Y(t)=1-p+pt$, ainsi on a bien $G_Z=G_Y\circ G_X$.
3. Puisque G_Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 1, Z admet des moments à tout ordre, en particulier $\mathbb{E}(Z)=G'_Z(1)=pG'_X(1)=\lambda p$ et
$$\mathbb{V}(Z)=G''_Z(1)+G'_Z(1)-G'_Z(1)^2=p\lambda^2+p\lambda-p^2\lambda^2=p\lambda(\lambda+1-p\lambda)$$

Corrigé de l'exercice 11

1. C'est une question de cours : $S=X+Y$ suit une loi $\mathcal{B}(n+m,p)$
2. Soit $s\in[\![0,n+m]\!]$, on a alors, pour $k>s$, $\mathbb{P}(X=k|S=s)=0$ et, pour $k\leqslant s$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k|S=s) &= \frac{\mathbb{P}(X=k,S=s)}{\mathbb{P}(S=s)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X=k,Y=s-k)}{\mathbb{P}(S=s)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=s-k)}{\mathbb{P}(S=s)} \qquad \textit{par indépendance}\\ &= \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{m}{s-k}p^{s-k}(1-p)^{m-s+k}}{\binom{n+m}{s}p^s(1-p)^{m+n-s}}\\ &= \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{s-k}}{\binom{n+m}{s}}\end{aligned}$$
Puisque $\sum_{k=0}^{s}\mathbb{P}(X=k|S=s)=1$ on a donc
$$\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\binom{m}{s-k}=\binom{n+m}{s}$$
3. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $([X=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=Y, X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)\\
&= \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\binom{m}{k}\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{m-k}\\
&= \frac{1}{2^{n+m}}\sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k}\binom{m}{k}\\
&= \frac{1}{2^{n+m}}\sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k}\binom{m}{m-k}\\
&= \frac{1}{2^{n+m}}\binom{n+m}{n}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 12

Commençons par prouver que $\frac{1}{1+Z}$ admet une espérance. Par le théorème de transfert, $\frac{1}{1+Z}$ admet une espérance si la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Z=k)$ converge absolument. Or, pour $N\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k+1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{i=1}^{N+1}\frac{\lambda^{i}}{i!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{N+1}\frac{\lambda^{i}}{i!}-1\right)
\end{aligned}$$

Chgt d'indice

$i=k+1$.

On reconnait une série exponentielle donc convergente, ainsi $\frac{1}{1+Z}$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Z}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}\mathbb{P}(Z=k)\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}-1\right)\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1)\\
&= \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}$$

D'autre part, X et Y admettent des espérances donc $X+Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) = 2\lambda$.

Mais par le lemme des coalitions, $X+Y$ et $\frac{1}{1+Z}$ sont indépendantes, et donc leur produit admet une espérance et

$$\mathbb{E}\left(\frac{X+Y}{1+Z}\right) = \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+Z}\right) = 2\left(1-e^{-\lambda}\right).$$

Corrigé de l'exercice 13

1. Y_i ne prend que les valeurs 0 et 1, et $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 2) = \dfrac{2}{3}$.

   Donc Y_i suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.
2. Les X_i étant indépendantes, il en est de même des Y_i.

   On en déduit que $Y_1 + \cdots + Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{2}{3}\right)$.
3. On a $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n}((X_i - 1) + 1) = n + \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

   Par conséquent, S_n prend ses valeurs dans $[\![n, 2n]\!]$, et pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_n = k - n) = \binom{n}{k-n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-(k-n)} = \binom{n}{k-n}\frac{2^{k-n}}{3^n}.$$

Corrigé de l'exercice 14

1. Soit X_n la variable aléatoire représentant le nombre de « 6 »obtenus lors de ces n lancers.

   Si on suppose le dé équilibré, et les lancers indépendants, X suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

   Ainsi $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$
2. On a $\mathbb{V}(F_n) = \dfrac{1}{n^2}V(X_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

   Or, en étudiant les variations de la fonction $x \mapsto x(1 - x)$ sur $[0, 1]$, on montre que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad 0 \leqslant x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$$

   Ainsi, on a bien $\mathbb{V}(F_n) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.
3. F_n admet un moment d'ordre 2, donc, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant 10^{-2}) \leqslant 10^4\mathbb{V}(F_n) \leqslant \frac{10^4}{4n}$$

   Pour $n \geqslant \dfrac{10^4}{0.05 \times 4} = 5 \times 10^4$, on a $\dfrac{10^4}{4n} \leqslant 0.05$.
4. Si l'on remplace 10^{-2} par 10^{-3}, il faut multiplier n par 100.

Inégalité classique

Cette inégalité est d'usage assez courant et n'est pas toujours rappelée, il est donc bon de la connaître et de savoir la prouver

Corrigé de l'exercice 15

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0.001$.

   Son espérance est alors $\mathbb{E}(X) = 0.5$ et sa variance est $\mathbb{V}(X) = 0,4995$.
2. n est très grand, p est très petit, on va alors approcher la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre $np = \dfrac{1}{2}$.

   Or d'après l'énoncé, si Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ alors

$$[\mathbb{P}(Y \leqslant a) \geqslant 0.999] \Rightarrow [a \geqslant 4]$$

   Avec une probabilité supérieure à $0,999$ il y aura donc au plus 4 navires coulés

   La compagnie doit alors posséder 20 millions pour être sûre de pouvoir payer les indemnités avec une probabilité de 0.999 à la fin de l'année.

Corrigé de l'exercice 16

1. Puisque les X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, S_n est à valeurs dans $[\![n, +\infty[\![$.
Et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{S_n} \leqslant 1$.
Puisque la variable constante égale à 1 admet une espérance, il en est de même de $\dfrac{1}{S_n}$.

2. Commençons par le cas trivial : $n = k$. Alors $\dfrac{S_k}{S_n} = 1$, et donc $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right) = 1$.

Même s'il n'est pas nécessaire de distinguer ce cas, qui recoupe les deux cas suivants.

- **Si** $k \geqslant n$, alors
$$\frac{S_k}{S_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} + \cdots + X_k}{S_k} = 1 + \frac{X_{n+1}}{S_n} + \cdots + \frac{X_k}{S_n}.$$
Par le lemme des coalitions, X_i est indépendante de S_n, pour $i \geqslant n+1$. Et donc X_i est indépendante de $\dfrac{1}{S_n}$.
On a alors $\mathbb{E}\left(\dfrac{X_i}{S_n}\right) = \mathbb{E}(X_i) \times \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right) = \dfrac{m_n}{p}$.
Et donc $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right) = 1 + (k-n)\dfrac{m_n}{p}$.

- **Dans le cas où** $k < n$, alors $\dfrac{S_k}{S_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dfrac{X_i}{S_k}$, et les $\dfrac{X_i}{S_k}$ admettent une espérance car sont dominées par 1.
De plus, par indépendance des X_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{X_i}{X_1 + \cdots + X_n}$ a même loi que $\dfrac{X_1}{X_1 + \ldots X_n}$ et donc même espérance. Notons $A = \mathbb{E}\left(\dfrac{X_1}{X_1 + \cdots + X_n}\right)$. Alors on a
$$1 = \mathbb{E}(1) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{S_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{S_n}\right) = nA.$$
Et donc $A = \dfrac{1}{n}$, de sorte que $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right) = \dfrac{k}{n}$.

Détails

Les X_i étant indépendantes et de même loi, le lemme des coalitions nous assure que les vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$ et
$$(X_i, X_2, \ldots X_{i-1}, X_1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$$
ont même loi.
Et alors $\dfrac{X_1}{S_n}$ a même loi que $\dfrac{X_i}{S_n}$

Corrigé de l'exercice 17

1. Il s'agit de revenir à la définition d'une variable aléatoire : X est une variable aléatoire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x] \in \mathcal{A}$.
Or, N étant une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$, on a
$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [N = n].$$
Ainsi,
$$[X \leqslant x] = \Omega \cap [X \leqslant x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [X \leqslant x] \cap [N = n].$$
Mais si $N = n$, alors $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est bien une variable aléatoire car somme d'un nombre fini de variables aléatoires.
En particulier, $\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right] \in \mathcal{A}$.
Et donc
$$[X \leqslant x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right]}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{[N = n]}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$
car une tribu est stable par intersections et par unions dénombrables.

Variable aléatoire

Il s'agit donc ici de prouver que $[X \leqslant x]$ est bien un événement (*i.e.* un élément de la tribu $\mathcal{A}$), et pour cela, il faut utiliser les propriétés des tribus et le fait que les X_i et N sont des variables aléatoires.

2. On va supposer que les variables aléatoires X_k sont toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour simplifier la preuve.

   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n|N=k)\mathbb{P}(N=k)$, d'où

   $$\sum_n n\mathbb{P}(X=n) = \sum_n n \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n|N=k)\mathbb{P}(N=k) = \sum_n \sum_k n\mathbb{P}(X=n|N=k)\mathbb{P}(N=k)$$

   Or sachant $N=k$, X est la somme de k variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une espérance $\mathbb{E}(X_0)$ donc $\sum_n n\mathbb{P}(X=n|N=k)\mathbb{P}(N=k)$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n|N=k) = k\mathbb{E}(X_0)\mathbb{P}(N=k)$

   Puis $\sum_k k\mathbb{E}(X_0)\mathbb{P}(N=k)$ converge vers $\mathbb{E}(X_0)\mathbb{E}(N)$.

   Comme la somme double converge absolument on peut échanger les ordres de sommation

   On en déduit que $\sum_n n\mathbb{P}(X=n)$ converge et

   $$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n|N=k)\mathbb{P}(N=k) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n|N=k)\mathbb{P}(N=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X)$$

   Finalement on a bien $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_0)\mathbb{E}(N)$.

Échange

Ce résultat n'est pas au programme en PT, toutefois il est toléré **dans les exercices de probabilité** de considérer que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation

---

Corrigé de l'exercice 18

1. On a $Q(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$
2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N} \times [\![0, N-1]\!]$, on a

   $$\mathbb{P}(Q=i, R=j) = \mathbb{P}(X = iN+j) = (1-\alpha)\alpha^{iN+j}$$

3. On en déduit que, pour $i \in \mathbb{N}$ on a

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Q=i) &= \sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}(Q=i, R=j)\\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (1-\alpha)\alpha^{iN+j}\\ &= (1-\alpha)\alpha^{iN} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha^j\\ &= (1-\alpha)\alpha^{iN} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}\\ &= (1-\alpha^N)(\alpha^N)^i\end{aligned}$$

   Ainsi $Q \sim \mathscr{G}(1-\alpha^N)$.

   Et, pour $j \in [\![0, N-1]\!]$

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(R=j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Q=i, R=j)\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (1-\alpha)\alpha^{iN+j}\\ &= (1-\alpha)\alpha^j \sum_{i=0}^{+\infty} (\alpha^N)^i\\ &= (1-\alpha)\alpha^j \frac{1}{1-\alpha^N}\end{aligned}$$

4. On a, pour $(i,j) \in \mathbb{N} \times [\![0, N-1]\!]$

$$\mathbb{P}(Q=i)\mathbb{P}(R=j) = (1-\alpha^N)(\alpha^N)^i(1-\alpha)\alpha^j \frac{1}{1-\alpha^N} = (1-\alpha)\alpha^{iN+j} = \mathbb{P}(Q=i, R=j)$$

   Ainsi Q et R sont indépendantes.

Corrigé de l'exercice 19

Remarquons que l'on a $X_{k+1} \leqslant X_k$ presque surement, ainsi on aura $0 \leqslant X_k \leqslant n$ presque surement pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Le premier tirage s'effectue dans I_n, la loi de X_1 est alors la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$, son espérance est $\dfrac{n}{2}$.

   Déterminons sa variance. D'après le théorème de transfert on a

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{n(2n+1)}{6}$$

   D'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(4n+2-3n)}{12} = \frac{n^2+2n}{12}$$

2. Sachant $[X_k = p]$ X_{k+1} est la loi d'un tirage uniforme dans I_p, ainsi la loi de X_{k+1} sachant $[X_k = p]$ est la loi uniforme sur $[\![0, p]\!]$.
3. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on a, d'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événement $([X_k = j])_{j \in [\![1,n]\!]}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1} = i) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j)\mathbb{P}(X_k = j) \\
&= \sum_{j=i}^{n} \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j)\mathbb{P}(X_k = j) \\
&= \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j+1}\mathbb{P}(X_k = j)
\end{aligned}$$

4. Toutes les variables aléatoires étant bornées elles admettent toutes une espérance.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{n} i\mathbb{P}(X_{k+1}=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j+1}\mathbb{P}(X_k=j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1}\mathbb{P}(X_k=j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \frac{i}{j+1}\mathbb{P}(X_k=j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}\mathbb{P}(X_k=j)\sum_{i=0}^{j} i \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j+1}\mathbb{P}(X_k=j)\frac{j(j+1)}{2} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2}\mathbb{P}(X_k=j) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{X_k}{2}\right) \\
&= \frac{\mathbb{E}(X_k)}{2}
\end{aligned}$$

La suite $(\mathbb{E}(X_{k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, on obtient alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{2^{k-1}}\mathbb{E}(X_1) = \frac{n}{2^k}$$

Corrigé de l'exercice 20

1. On a $\frac{1}{4} = \mathbb{P}(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, d'où $\lambda = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(4)$.
2. On a

$$\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda)$$

Et

$$\mathbb{P}(X \text{ impair}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k+1) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{sh}(\lambda)$$

Puisque $\operatorname{ch}(x) \geqslant \operatorname{sh}(x$ pour tout réel x, on a donc $\mathbb{P}(X \text{ pair}) \geqslant \mathbb{P}(X \text{ impair})$. Ainsi les deux amis ont plus de chance de se partager les poissons que de faire une bouillabaisse.
3. Il nous faut déterminer la probabilité que X soit une multiple de 4. Or

$$\mathbb{P}(X \text{ multiple de } 4) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=4k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{4k}}{(4k)!}$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x)+\cos(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(1+(-1)^k)\frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
&= 2\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^{4j}}{(4j)!}
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\mathbb{P}(X \text{ multiple de } 4) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\mathrm{ch}(\lambda) + \cos(\lambda)\right)$$

4. Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k) = \dfrac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X \text{ impair}) + \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \mathrm{e}^{-\lambda}$.
La série génératrice de Y est alors la série entière
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}2}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$
Cette série a pour rayon de convergence ∞. Si $t \geqslant 0$ on a
$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t}\lambda)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\sqrt{t}\lambda) \end{aligned}$$
Et, si $t < 0$ alors
$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k(-t)^k \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{-t}\lambda)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} + \mathrm{e}^{-\lambda}\cos(\sqrt{-t}\lambda) \end{aligned}$$
G_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 1 donc Y admet une espérance et une variance. On a, pour $t > 0$ $G_Y'(t) = \dfrac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{sh}(\sqrt{t}\lambda)$, d'où
$$\mathbb{E}(Y) = G_Y'(1) = \frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{2\sqrt{1}}\,\mathrm{sh}(\sqrt{1}\lambda) = \frac{\lambda(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{4}$$
Puis, pour $t > 0$, $G_Y''(t) = \dfrac{-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{4t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{sh}(\sqrt{t}\lambda) + \dfrac{\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}}{2t}\,\mathrm{ch}(\sqrt{t}\lambda)$, d'où
$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = G_Y''(1) = \frac{-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{4}\,\mathrm{sh}(\lambda) + \frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\,\mathrm{ch}(\lambda)$$
Et donc
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y(Y-1)) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= \frac{-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{4}\,\mathrm{sh}(\lambda) + \frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\,\mathrm{ch}(\lambda) + \frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\,\mathrm{sh}(\lambda) - \frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}\,\mathrm{sh}(\lambda)^2 \\ &= \frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\,\mathrm{ch}(\lambda) + \frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{4}\,\mathrm{sh}(\lambda) - \frac{\lambda^2\mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}\,\mathrm{sh}(\lambda)^2 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 21

1. Chaque particule est détectée avec probabilité p, et ce, indépendamment des autres.

   Puisqu'il y a n clients, nous reconnaissons alors une loi usuelle : la loi de S sachant $N=n$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

   Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(S=s|N=n)=\begin{cases}0 & \text{si } s>n\\ \binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} & \text{sinon}\end{cases}$$

   Et donc

$$\mathbb{P}(N=n,S=s)=\mathbb{P}(S=s|N=n)\mathbb{P}(N=n)=\begin{cases}0 & \text{si } s>n\\ \binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} & \text{sinon}\end{cases}$$

2. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $([N=n]_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour $s\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=s)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=s,N=n)\\&=\sum_{n=s}^{+\infty}\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\&=\frac{e^{-\lambda}}{s!}(\lambda p)^s\sum_{n=s}^{+\infty}\frac{1}{(n-s)!}(\lambda-\lambda p)^{n-s}\\&=\frac{e^{-\lambda}}{s!}(\lambda p)^s\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}(\lambda-\lambda p)^j\\&=\frac{e^{-\lambda}}{s!}(\lambda p)^s\,\mathrm{e}^{\lambda-\lambda p}\\&=\frac{e^{-\lambda p}}{s!}(\lambda p)^s\end{aligned}$$

   On en déduit que S suit une loi de Poisson de paramètre λp. Ainsi $\mathbb{E}(S)=\mathbb{V}(S)=\lambda p$

3. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $([N=n]_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N-S=k)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N-S=k,N=n)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=n-k,N=n)\\&=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\&=\frac{e^{-\lambda}}{k!}(\lambda(1-p))^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}(\lambda p)^{n-k}\\&=\frac{e^{-\lambda}}{k!}(\lambda(1-p))^k\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}(\lambda p)^j\\&=\frac{e^{-\lambda}}{k!}(\lambda(1-p))^k\,\mathrm{e}^{\lambda p}\\&=\frac{e^{-\lambda(1-p)}}{k!}(\lambda(1-p))^k\end{aligned}$$

   . On en déduit que $N-S$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

   Soit $(k,s)\in\mathbb{N}^2$, on a

$$\mathbb{P}(S=s,N-S=k)=\mathbb{P}(S=s,N=s+k)=\binom{s+k}{s}p^s(1-p)^k\frac{\lambda^{s+k}}{(s+k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Et

$$\mathbb{P}(S=s)\mathbb{P}(N-S=k)=\frac{e^{-\lambda p}}{s!}\left(\lambda p\right)^{s}\frac{e^{-\lambda(1-p)}}{k!}\left(\lambda(1-p)\right)^{k}=\binom{s+k}{s}p^{s}(1-p)^{k}\frac{\lambda^{s+k}}{(s+k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Ainsi, S et $N-S$ sont indépendantes.

4. On a $\mathbb{P}(S=1,N=0)=0$ et $\mathbb{P}(S=1)\mathbb{P}(N=0)=\lambda p\mathrm{e}^{-\lambda}\times\lambda\neq 0$, ainsi S et N ne sont pas indépendantes.
5. On a $\mathbb{P}(N=n|S=s)=0$ si $n>s$ et, si $n\leqslant s$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=n|S=s)&=\frac{\mathbb{P}(N=n,S=s)}{\mathbb{P}(S=s)}\\&=\frac{\binom{n}{s}p^{s}(1-p)^{n-s}\frac{\lambda^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}}{\frac{e^{-\lambda p}}{s!}\left(\lambda p\right)^{s}}\\&=\frac{(\lambda-\lambda p)^{n-s}\mathrm{e}^{\lambda p-\lambda}}{(n-s)!}\end{aligned}$$